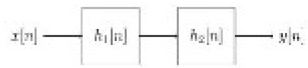
4 FIR-Filter [30]

Ein zeit-diskretes Signal $x[n]$ wird über eine Nachrichtenübertragungsstrecke übertragen, die aus der Reihenschaltung zweier Filter besteht, wie es im nachstehenden Signalflussgraph dargestellt ist. Die beiden Filter besitzen die Impulsantworten $h_1[n]$ bzw. $h_2[n]$.



Die Systeme besitzen folgende Impulsantworten:

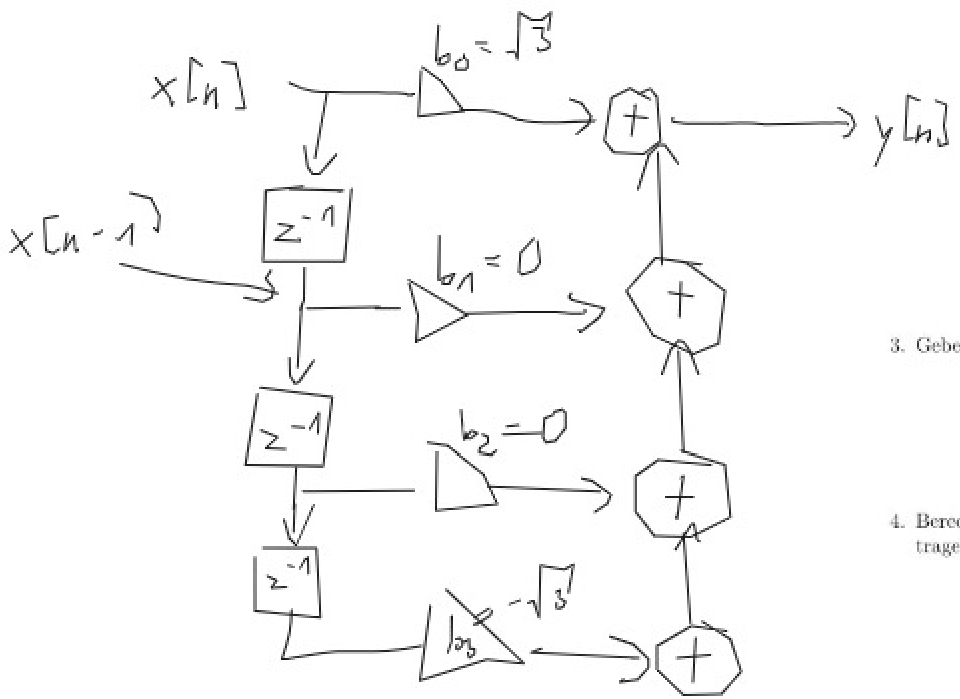
$$h_1[n] := (1, -1)$$
$$h_2[n] := \left(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$$

1. Geben Sie die Impulsantwort des resultierenden Gesamtsystems $h_{ges}[n]$ sowie die Filterkoeffizienten an. Welche Ordnung besitzt das Gesamtsystem? [5]

1) $h_{ges}[n] = \langle \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle + \langle 0, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3} \rangle =$

$= \langle \sqrt{3}, 0, 0, -\sqrt{3} \rangle$

Ordnung $= 3 =$ 3 Zeitverschiebungen



$(1, 0, 0, 0)$

$h_1[n] = (7, 6, -4)$

$h_2[n] = (3, 2, 1, 9)$

$h_{ges}[n] = (21, 14, 7, 63) + (0, 18, 12, 6, 54) + (0, 0, -12, -8, -4, -36) =$

$(21, 32, 7, 61, 50, -36)$

$h_1[n] = (2, 3)$

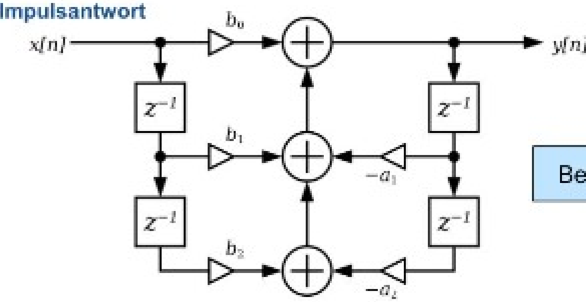
$h_2[n] = (4, 5, 6)$

$h_{ges} =$

Realisierung & Darstellung digitaler Filter

Infinite Impulse Response Filter (IIR)

***Unendliche* Impulsantwort**



Beispiel

3. Geben Sie die Fourier-Transformierte $H(f)$ von $h_{ges}[n]$ an. [3]

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot \frac{n \cdot f}{f_a}}$$

$$= h[0] \cdot 1 + h[1] \cdot e$$

4. Berechnen Sie die Werte von $H(f)$ für die vorgegebenen Frequenzen f und tragen diese auf drei Nachkommastellen genau ein: [4]

$H(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$H\left(\frac{f_a}{6}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Von der DTFT zur DFT

2. Schritt: Analyse endlicher Signalabschnitte

Nach Fensterung (Schritt 1):

3. Geben Sie die Fourier-Transformierte $H(f)$ von $h_{ges}[n]$ an. [3]

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot \frac{n \cdot f}{f_a}}$$

$$= \underbrace{h[0]}_{\sqrt{3}} \cdot 1 + \underbrace{h[1]}_{=0} \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot \frac{f}{f_a}} + h[2] \cdot e^{-j \cdot 4\pi \cdot \frac{f}{f_a}} + \underbrace{h[3]}_{=0} \cdot e^{-j \cdot 6\pi \cdot \frac{f}{f_a}}$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot e^{-j \cdot 6\pi \cdot \frac{f}{f_a}}$$

Von der DTFT zur DFT

2. Schritt: Analyse endlicher Signalabschnitte

Nach Fensterung (Schritt 1):

$$X(f) = \sum_{n=0}^{N} x[n] \cdot \exp\left(-j 2\pi n \frac{f}{f_a}\right)$$

4. Berechnen Sie die Werte von $H(f)$ für die vorgegebenen Frequenzen f und tragen diese auf drei Nachkommastellen genau ein: [4]

$$H(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$H\left(\frac{f_a}{6}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$H\left(\frac{f_a}{3}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$H\left(\frac{f_a}{2}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

4) $H(0) = \sqrt{3} - \sqrt{3} \underbrace{e^{0}}_{=1} = 0$

$$H\left(\frac{f_a}{6}\right) = \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \underbrace{e^{-j \cdot \pi}}_{=-1} = 2 \cdot \sqrt{3} = 3{,}4641\ldots \approx \underline{\underline{3{,}464}}$$

$e^{-j \cdot \pi} = -1$

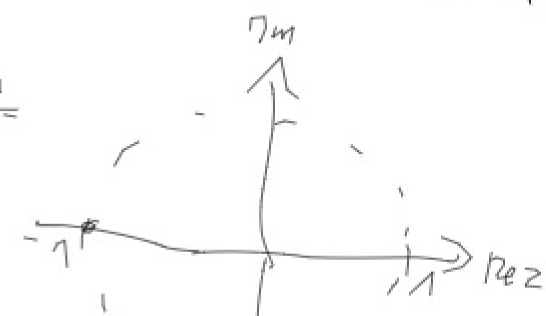
$$H\left(\frac{f_a}{3}\right) = \sqrt{3} - \sqrt{3} \underbrace{e^{-j \cdot 2\pi}}_{=1} = 0$$

$$H\left(\frac{f_a}{2}\right) = \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \underbrace{e^{-j \cdot 3\pi}}_{=-1} = 2 \cdot \sqrt{3} \approx 3{,}464$$

$$H\left(n \cdot f_a + \frac{f_a}{6}\right) = H\left(\left(n + \frac{1}{6}\right) \cdot f_a\right) = \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot e^{-j \cdot 6\pi \left(n + \frac{1}{6}\right)}$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \underbrace{e^{-j \cdot 6\pi \cdot n - j\pi}}_{=1} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}464$$

$a^n \cdot a^m =$



5. Begründen Sie, ob es sich bei dem vorliegenden System um einen Tiefpass-Filter handeln kann. [2]

Nein, kein Tiefpassfilter, da $\frac{f_a}{2} > \frac{f_a}{3}$ aber $H\left(\frac{f_a}{2}\right) > H\left(\frac{f_a}{3}\right)$

6. Begründen Sie, ob der vorliegende Filter eine Band-Sperre-Charakteristik hat. [2]

Ja!

7. Begründen Sie, ob das resultierende Gesamtsystem stabil ist. [1]

8. Begründen Sie, ob das resultierende Gesamtsystem linearphasig ist. [1]

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cdot z^{-n} = h[0] \cdot z^{-0} + \underbrace{h[1]}_{=0} \cdot z^{-1}$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot z^{-3} = \sqrt{3}$$

Zusammen

Ähnlich wie die
sind die z-Trans

$X(z)|_{z=\exp(j}$

8. Begründen Sie, ob das resultierende Gesamtsystem linearphasig ist. [1]

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cdot z^{-n} = h[0] \cdot z^{-0} + \underbrace{h[1]}_{=0} \cdot z^{-1} + \underbrace{h[2]}_{=0} \cdot z^{-2} + \underbrace{h[3]}_{=-\sqrt{3}} \cdot z^{-3}$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot z^{-3} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{z^3} = \frac{z^3 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3}}{z^3}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \cdot (z^3 - 1)}{z^3}$$

$= 2 \cdot \sqrt{3} \approx 3{,}464$

$$\cdot f_a) = \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot e^{-j \cdot 6\pi (n + \frac{1}{6})}$$

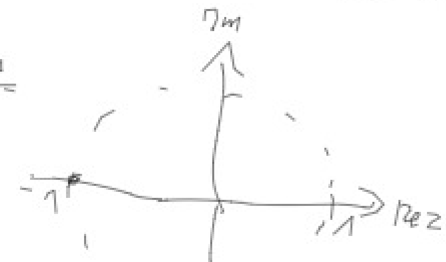
$$= \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \underbrace{e^{-j \cdot 6\pi \cdot n - j\pi}}_{=1} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}464$$

$z^3 - 1 = 0$

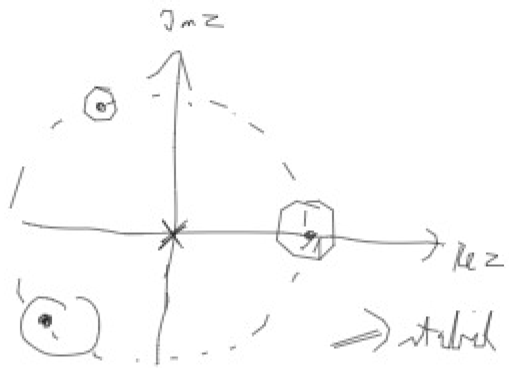
$z^3 = 1$

$\{ z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 1 \}$

$= \{ 1, e^{\frac{2\pi j}{3}}, e^{2 \cdot \frac{2\pi j}{3}} \}$



PN-Diagramm

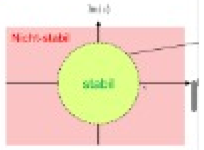


$\Rightarrow$ stabil

Eigenschaften - Systemstabilität

Stabilität: Ein kausales System ist stets dann stabil, wenn die Beträge aller **Polstellen** der z-Übertragungsfunktion echt kleiner als 1 sind

BIBO-stabil: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$

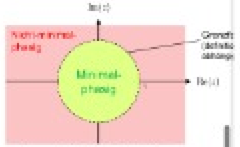


Lage der **Polstellen** im PN-Diagramm

Z-Transformation
Eigenschaften - Minimalphasigkeit

Minimalphasigkeit: Ein stabiles, kausales System ist stets dann minimalphasig, wenn die Beträge aller **Nullstellen** der z-Übertragungsfunktion echt kleiner als **1** sind

Minimalphasigkeit: Kein Allpass-Anteil



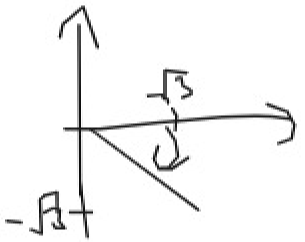
Lage der **Nullstellen** im PN-Diagramm

$\Downarrow$

nicht - minimalphasig

9. Begründen Sie, ob das resultierende Gesamtsystem minimalphasig ist. [4]

10. Nun wird das System mit einem idealen Cosinus der Frequenz $f = \frac{f_a}{4}$ und Amplitude von 1 angeregt. Wie ist das resultierende Ausgangssignal? [4]



$$H\left(\frac{f_a}{4}\right) = \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot e^{-j \cdot \frac{6}{4}\pi}$$

$$= \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \underbrace{e^{-j \cdot \frac{3}{2}\pi}}_{= j} = \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot j = \sqrt{3} \cdot e^{-\frac{\pi}{4} j}$$

$$\left|H\left(\frac{f_a}{4}\right)\right| = \sqrt{3+3} = \sqrt{6} \approx \underline{\underline{2{,}45}}$$

$$y(t) = 2{,}45 \cdot \cos\left(\frac{f_a}{4} \cdot 2\pi \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$$